Osnove analize

Odvodi

funkcija	*odvod*
c	0
x^n	nx^{n-1}
a^x	$a^x \ln a$
$\frac{a^x}{\ln a}$	a^x
x^x	$x^x(1+\ln x)$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x\ln(a)}$
$\sin(x)$	$cos(x)$
$\cos(x)$	$-sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\text{arccot}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$
$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\text{ch}(x)$
$\text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\text{sh}(x)$
$\text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$	$\frac{1}{\text{ch}^2(x)}$
$\text{cth}(x) = \frac{1}{\text{th}(x)}$	$-\frac{1}{\text{sh}^2(x)}$
$\text{arsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\text{arch}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\text{arth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$\frac{1}{(1+x)(1-x)}$

Gamma in Beta funkciji

Gamma funkcija:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \quad x \in (0,\infty)$$

1. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)\ \forall x > 0$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!\ \forall n \in \mathbb{N}$
3. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Beta funkcija:

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad p,q > 0$$

1. $\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.\ \forall p,q > 0$
2. $\beta(p,q) = \int_0^\infty \frac{u^{p-1}}{(1+u)^{p+q}}du\ (t = \frac{u}{1+u})$
3. $\int_0^{\pi/2} sin^{2p-1}x \cdot cos^{2q-1}xdx = \frac{1}{2}\beta(p,q) \quad p,q > 0$ $(t = \sin x^2)$
4. $\beta(1,q) = \frac{1}{q}$
5. $\beta(p+1,q) = \frac{p}{p+q}\beta(p,q)$
6. $\beta(p,q) = \beta(q,p) \quad \beta(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \pi$
7. $\beta(p,1-p) = \frac{\pi}{sin(\pi p)}, \quad \frac{d}{d^{[k]}x}(\beta(p,1-p)) = \frac{u^x \ln^k(x)}{1+u}, \quad p \in (0,1)$
8. $\int_0^1 x^p(1-x)^q\ dx = \beta(p+1,q+1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)}{\Gamma(p+q+2)}$
9. $\int_0^\infty \frac{x^p}{(1+x)^q}\ dx = \beta(p+1,q-p-1) = \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q-p-1)}{\Gamma(q)}$
10. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p\varphi\cos^q\varphi\ d\varphi = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{p+1}{2},\frac{q+1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{2\Gamma(\frac{p+q+2}{2})}$

Nove spremenljivke

Jacobijeva matrika

Naj bo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$,
$f(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$,
Jacobijevo matriko definiramo kot:

$$J_{f(x_1,\dots,x_n)} = \begin{bmatrix} f_{1_{x_1}} & f_{1_{x_2}} & \cdots & f_{1_{x_n}} \\ f_{2_{x_1}} & f_{2_{x_2}} & \cdots & f_{2_{x_n}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m_{x_1}} & f_{m_{x_2}} & \cdots & f_{m_{x_n}} \end{bmatrix}$$

Vpeljava

Naj bosta $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ preslikava z zvezno odvedljivimi komponentami. Naj bo $detJ_\varphi \neq 0$ na Ω in naj bo $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}^2$ zvezna. Potem:

$$\iint_{\varphi(\Omega)} f(x,y)dxdy = \iint_\Omega f(\varphi(t,s)) \cdot |detJ_\varphi(t,s)|dtds$$

Polarne koordinate

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad |detJ| = r \quad r \geq 0 \quad \varphi \in [0,2\pi]$

Cilindrične koordinate

$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi \quad z = z \quad |detJ| = r \quad r \geq 0 \quad \varphi \in [0,2\pi]$

Sferične koordinate

$x = R\cos\varphi\cos\vartheta \quad y = R\sin\varphi\cos\vartheta \quad z = R\sin\vartheta \quad R \geq 0 \quad \varphi \in [0,2\pi]$

Osnove kombinatorike

Rodovne funkcije

$$\sum_{n=0}^\infty q^n = \frac{1}{1-q} \qquad \sum_{n=0}^b q^n = \frac{1-q^{b+1}}{1-q}$$

$$\sum_{n=a}^\infty q^n = \frac{q^a}{1-q} \qquad \sum_{n=a}^b q^n = \frac{q^a - q^{b+1}}{1-q}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$\frac{a_0+\dots+a_{k-1}x^{k-1}}{1-x^k} = a_0+\dots+a_{k-1}x^{k-1}+a_0^k+\dots+a_{k-1}x^{2k-1}+\dots$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k$$

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n+k-1}{k}x^k$$

$$B_\lambda(x) = \sum_n \binom{\lambda}{n}x^n = (1+x)^\lambda; \qquad \binom{\lambda}{n} = \frac{\lambda^{\underline{n}}}{n!}$$

Izbori

Imamo n oštevilčenih kroglic. Na koliko načinov lahko izberemo k kroglic?

	s pon.	**brez pon.**
variacije *vrstni red je pomemben*	n^k	$n^{\underline{k}}$
kombinacije *vrstni red ni pomemben*	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

Kompozicije

Kompozicija števila $n \in \mathbb{N}$ je $(\lambda_1,\dots,\lambda_l)$, če $\lambda_i \geq 1$ in $\lambda_1 + \dots + \lambda_l = n$. Če $\lambda_i \geq 0$, je kompozicija **šibka**. λ_i člen, l dolžina in n velikost kompozicije.
Število kompozicij n je 2^{n-1}, n dolžine k pa $\binom{n-1}{k-1}$ za $n,k \geq 1$.
Število šibkih kompozicij n dolžine k je $\binom{n+k-1}{n}$ za $n,k \geq 1$.

Rekurzivne enačbe

$c_d a_n + c_{d-1}a_{n-1} + \dots + c_0 a_{n-d} = 0 \quad c_i \in \mathbb{C} \quad c_0, c_d \neq 0$

$$P(x) = c_d\lambda^d + c_{d-1}\lambda^{d-1} + \dots + c_0$$

$$a_n = \sum_{i=1}^k p_i(n)\cdot\lambda_i^n$$

Kjer $P(x)$ **karakteristični polinom**, $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ njegove ničle in p_i polinom stopnje $<$ kratnost ničle λ_i.

$$c_d a_n + c_{d-1}a_{n-1} + \dots + c_o a_{n-d} = r(n)\cdot\lambda^n$$

$$a_n = a_n^H + q(n)\cdot\lambda^n\cdot n^\alpha$$

Kjer $c_i \in \mathbb{C}$, $c_0, c_d \neq 0$, a_n^H rešitev homogenega dela, $deg(q) \leq deg(r)$ in $\alpha \geq 0$ kratnost λ v $P(x)$.

Kompleksne ničle

$$\lambda = x + i\cdot y = |\lambda|(cos(\phi) + i\cdot sin(\phi))$$

$$\overline{\lambda} = x - i\cdot y = |\lambda|(cos(\phi) - i\cdot sin(\phi))$$

$$a_n = A\cdot\lambda_n + B\cdot\overline{\lambda}_n = |\lambda|(A'cos(n\phi) + B'sin(n\phi))$$

Osnove verjetnosti

idempotentnost	$A \cup A = A = A \cap A$
komutativnost	$A \cup B = B \cup A$
	$A \cap B = B \cap A$
asociativnost	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
distibutivnost	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (A \cap C)$
	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (A \cup C)$
De Morgan	$(\bigcup_{i\in I} A_i)^\complement = \bigcap_{i\in I} A_i^\complement$
	$(\bigcap_{i\in I} A_i)^\complement = \bigcup_{i\in I} A_i^\complement$
	$A \cup \Omega = \Omega \quad A \cap \Omega = A$
	$A \cup \emptyset = A \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
	$A \cup A^\complement = \Omega \quad A \cap A^\complement = \emptyset$

Neprazna družina dogodkov $\mathcal{F}$ v Ω je σ-algebra, če velja

- zaprtost za komplemente:
$$A \in \mathcal{F} \implies A^\complement \in \mathcal{F}$$
- zaprtost za števne unije:
$$A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^\infty A_i \in \mathcal{F}$$

Če zahtevamo zaprtost le za končne unije, je $\mathcal{F}$ le algebra.

Ker je po De Morganovem zakonu $\left(\bigcup_{i\in I} A_i^\complement\right)^\complement = \bigcap_{i\in I} A_i$ imamo zaprtost tudi za preseke.

Ker je $A \setminus B = A \cap B^\complement$ je algebra zaprta tudi za razlike.

Najmanjša algebra je **trivialna**: $\{\emptyset, \Omega\}$.

Največja algebra je: $\mathcal{P}(\Omega)$.

Najmanjša algebra, ki vsebuje E je $\{\emptyset, E, E^\complement, \Omega\}$.

Dogodka A in B sta **nezdružljiva** (disjunktna), če je $A \cup B = \emptyset$.

Zaporedje $\{A_i\}_i \in \mathcal{F}$ (končno ali števno mnogo) je **popoln sistem dogodkov**, če

$$\bigcup_i A_i = \Omega \qquad A_i \cup A_j = \emptyset, \forall i,j : i \neq j$$

Verjetnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je preslikava $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ z lastnostmi:

- $P(A) \geq 0$ za $\forall A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega) = 1$
- Za paroma nezdružljive dogodke $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ velja *števna aditivnost*
$$P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = \sum_{i=1}^\infty P(A_i)$$

Lastnosti P:

- $P(\emptyset) = 0$
- P je končno aditivna.
- P je *monotona*: $A \subseteq B \implies P(A) \leq P(B)$
- $P(A^\complement) = 1 - P(A)$
- P je *zvezna*:
$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \implies P(\bigcup_{i=1}^\infty) = \lim_{i\to\infty} P(A_i)$$
$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots \implies P(\bigcap_{i=1}^\infty) = \lim_{i\to\infty} P(B_i)$$

$$P(A^\complement) = 1 - P(A)$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Če lahko prostor izidov razbijemo na paroma nezdružljive enako verjetne dogodke, jih lahko obravnavamo kot izide: če je dogodek A unija k od n takih dogodkov, je $P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{število izidov, ki so v A}}{\text{število vseh izidov}}$

Slepa ali **povsem naključna** izbira pravimo temu, da so vse možnosti enako verjetne.

Točka x je izbrana na slepo ali povsem naključno iz G, če za vsako merljivo podmnožico $A \subseteq G$ velja: $P(x \in A) = \frac{\text{mera množice } A}{\text{mera množice } G}$

Načelo vključitev in izključitev

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq [n]} (-1)^{|S|+1} P(\bigcap_{i \in S} A_i)$$

Pogojna verjetnost

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$P(A|B)$ je verjetnostna mera na celem prostoru.

Particije

Dogodke, ki tvorijo **particijo** prostora izidov, lahko obravnavamo kot izide. Z njimi lahko računamo verjetnosti vseh njihovih števnih unij. Če particijo tvori n enako verjetnih dogodkov in je dogodek A unija k dogodkov iz particije, je $P(A) = \frac{k}{n}$.

Izrek o polni verjetnosti

Če $H_1, H_2, H_3, \ldots$ (dogodku H_i pravimo hipoteza) tvorijo **popoln sistem dogodkov** *(tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih)*, velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots$$

Dogodkom H_i često pravimo hipoteze in jih je lahko končno ali pa števno neskončno.

(opomba) pri izreku o polni verjetnosti lahko malo popustimo pri predpostavki, da dogodki $H_1, H_2, H_3, \ldots$ tvorijo particijo množice Ω, kar pomeni, da ima presek poljubnih dveh z različnima indeksoma verjetnost nič, njihova unija pa ima verjetnost ena.

Bayesova formula

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$$

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H1)P(A|H1) + P(H2)P(A|H2) + \ldots}$$

Brezpogojnim verjetnostim $P(H_i)$ pravimo **apriorne**, pogojnim verjetnostim $P(H_i|A)$ pa **aposteriorne** verjetnosti hipotez.

Neodvisnost dogodkov

Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Če je $P(B) > 0$, je to ekvivalentno pogoju, da je $P(A|B) = P(A)$. Če je $0 < P(B) < 1$, pa je to ekvivalentno tudi pogoju, da je $P(A|B) = P(A|B^\complement)$. Dogodki $A1, A2, A3, \ldots$ so neodvisni, če za poljubne različne indekse $i_1, i_2, \ldots, i_k$ velja:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_k})$$

Če so $A_1, A_2, \ldots$ in $B_1, B_2, \ldots$ neodvisni dogodki, tudi za poljuben dogodek $A \in \sigma(A_1, A_2, \ldots)$ velja, da so dogodki $A, B_1, B_2, \ldots$ neodvisni. Pri tem je $\sigma(A_1, A_2, \ldots)$ najmanjša σ-algebra, ki vsebuje dogodke $A_1, A_2, \ldots$.

Slučajne spremenljivke

Slučajna spremenljivka je funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ z lastnostijo, da je $\forall x \in \mathbb{R}$ množica $\{\omega \in \Omega : X(\omega) < x\} \equiv X^{-1}((-\infty, x]) \equiv (X \leq x)$ dogodek.

Diskretne porazdelitve

Diskretne slučajne spremenljivke zavzamejo vrednosti le na števni množici, torej bodisi končni množici bodisi števno neskončni množici.
Za porazdelitev vsake take slučajne spremenljivke velja: $P(a_i = p_i)$ in $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$ **Diskretna enakomerna porazdelitev** na n točkah:

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \mathrm{Unif}\{a_1, \ldots, a_n\}$$

Binomska porazdelitev
$\mathrm{Bin}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

Naj bo X št. uspelih (z verjetnostjo p) poskusov v zaporedju n poskusov. $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$:

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Bernoullijevo zaporedje poskusov je zaporedje neodvisnih slučajnih poskusov, od katerih lahko vsak uspe ali ne uspe, in sicer vsak poskus uspe z isto verjetnostjo.

Bernulijeva porazdelitev $Ber(p) \sim Bin(1, p)$

Geometrijske porazdelitev
$\mathrm{Geom}(p)$, $p \in (0,1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se A zgodi prvič v k-ti ponovitvi.

$$P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

Geometrijska porazdelitev je tudi porazdelitev števila poskusov do vključno prvega uspelega, če izvajamo Bernoullijevo zaporedje poskusov, pri katerih vsak uspe z verjetnostjo p.

Pascalova / negativna binomska porazdelitev
$Pas(m,p) = NB(m,p)$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in (0,1)$

$(X = k)$ je dogodek, da se dogodek A zgodi m-tič v k-ti ponovitvi.

Oziroma X je število poskusov do vključno m-tega uspelega, pri katerig vsak uspe z verjetnostjo p.
$X \sim Pas(m,p)$:

$$p_k = P(X = k) = \binom{k-1}{n-1} p^k (1-p)^{k-n}$$

Hipergeometrijska porazdelitev
Iz posode, v kateri je n kroglic, od tega r rdečih, na slepo in brez vračanja izvlečemo s kroglic. Če z X označimo število rdečih med izvlečenimi, ima ta slučajna spremenljivka hipergeometrijsko porazdelitev: $X \sim \mathrm{Hip}(s,r,n) = \mathrm{Hip}(r,s,n)$. Velja

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{n-r}{s-k}}{\binom{n}{s}} = \frac{\binom{s}{k}\binom{n-s}{r-k}}{\binom{n}{r}}$$

Aproksimacija binomske porazdelitve

Poissonova porazdelitev

$Poi(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(np)^k e^{-np}}{k!}$$

Če imamo veliko ponovitev ($n \to \infty$) z malo verjetnostjo ($p \to 0$), je $\mathrm{Bin}(n,p) \approx \mathrm{Poi}(np)$

Laplaceova lokalna formula: Če je $p, 1-p \gg \frac{1}{n}$, lahko $X \sim \mathrm{Bin}(n,p)$ aproksimiramo

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(k-np)^2}{2\sigma^2}} \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)}$$

kjer je σ **standardni odklon** in $np = \lambda$ **pričakovano število uspelih poskusov**.

Meja med smotrnostjo uporabe Poissonovega obrazca in Laplacove lokalne formule je za velike n približno $p = \frac{0{,}6}{\sqrt[3]{n}}$

Laplaceova integralska formula:

$$P(a \leq X \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-np}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-np}{\sigma}\right)$$

kjer je $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$, ki je liha

Za majhno relativno napako zahtevamo še:

- $|a - np| \ll \sigma^{4/3}$ ali $|b - np| \ll \sigma^{4/3}$
- $a, b \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$ ali $b - a \gg 1$

Kumulativna porazdelitvena funkcija

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

Zvezno porazdeljene slučajne spremenljivke

Realna slučajna spremenljivka X je porazdeljena zvezno, če obstaja taka integrabilna funkcija $p_X : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, da za poljubna $a \leq b$ velja:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b p_X(t) dx$$

Funkciji p_X pravimo **porazdelitvena gostota**

Komulativna porazdelitvena funkcija slučajne spremenljivke X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(t) dt$$

ki predstavlja vse možne poltrake $C = (-\infty, x]$. Če je F_X zvezna in odsekoma zvezno odvedljiva, je X porazdeljena zvezno in za vse razen za končno mnogo točk x velja $p_x(x) = F'_X(x)$.

Slučajni vektorji

Slučajni vektor je n-terica slučajnih spremenljivk $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega -> R$

Porazdelitvena funkcija slučajnega vektorja

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 \leq x_1, \ldots, X_n \leq x_n)$$

Neodvisnot slučajnih spremenljivk

Slučajne spremenljivke so neodvisne, če je

$$F_{(X_1,\ldots,X_n)}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \ldots F_{X_n}(x_n)$$

Torej so dogodki $(X_1 \leq x_1), \ldots, (X_n \leq x_n)$ neodvisni.

Naj bo (X, Y) diskretno porazdeljen sluč. vektor:

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) \quad p_i = P(X = x_i) \quad P(Y = y_j)$

potem velja:

$$X, Y \text{neodvisni} \iff p_{ij} = p_i q_j$$

Naj bo (X, Y) zvezno porazdeljen sluč. vektor z gostoto $p_{(X,Y)}(x, y)$, potem velja:

$X, Y \text{neodvisni} \iff \exists p_X, p_Y : p_{(X,Y)}(x,y) = p_X(x) p_Y(y)$

Funkcije slučajnih spremenljivk

Naj bosta $A, B \subseteq \mathbb{R}$ odprti množici in $h : A \to B$ taka bijekcija, da je funkcija $h^{-1} : B \to A$ zvezno odvedljiva. Nadalje naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, ki je izven množice A enaka nič. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y := h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X\left(h^{-1}(y)\right) \left|(h^{-1})'(y)\right| & y \in B \\ 0 & sicer \end{cases}$$

Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto p_X, skoncentrirana na odprti množici A. Naj bo $h : A \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljiva in $h'(x) \neq 0$ za $\forall x \in A$. Tedaj je slučajna spremenljivka $Y = h(X)$ porazdeljena zvezno z gostoto:

$$p_Y = \sum_{\substack{x \in A \\ h(x) = y}} \frac{p_X(x)}{|h'(x)|}$$

Naj bosta $A, B \in \mathbb{R}^n$ odprti množici; $h : A \to B$ taka bijekcija, da je h^{-1} parcialno zvezno odvedljiva; X sl. vek. porazdeljen zvezno z gostoto p_X. Tedaj je $Y = h(X)$ porazdeljen:

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_X(h^{-1}(y)|\det J(h^{-1}(y))|) & y \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$J_g = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$